



TITLE:

# 状態のフラクタル次元によるガウス測度の分類とその応用(量子確率解析とその周辺)

AUTHOR(S):

松岡, 隆志

---

CITATION:

松岡, 隆志. 状態のフラクタル次元によるガウス測度の分類とその応用 (量子確率解析とその周辺). 数理解析研究所講究録 1996, 957: 134-153

ISSUE DATE:

1996-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60440>

RIGHT:

## 状態のフラクタル次元による ガウス測度の分類とその応用

東京理科大学 理工学部 松岡隆志  
(Takashi Matsuoka)

### 序論

状態のフラクタル次元とは、Mandelbrot のフラクタル幾何学[1]とKolmogorov の確率変数の  $\varepsilon$ -エントロピー[2]の概念をベースとして、Ohyaにより、一般の量子力学系 ( $C^*$ -力学系) の状態に対し導入された概念[3, 4, 5]である。

ここでは、Ohyaによる状態のフラクタル次元定式化のモチベーション、及びその数理概念の意味[6]を、簡単に振り返っておこう。

Mandelbrotが提案したフラクタル幾何学は、自然が示す形態の複雑さ（例えば、海岸線の地形や河川の形態、銀河系の分布など）の定量的な解析手法として非整数値をとる次元に新しい視点を授けたものであり、彼はその総称としてフラクタル次元（フラクタル幾何学）という名前を考案した[1]。フラクタルとは、一部、半端、断面といったことを意味するMandelbrotの造語である。この彼の着眼により、応用などあり得ない抽象的な概念としかみなされなかったHausdorff次元などの非整数値をとり得る次元は、自然のもつ複雑さを表わす量だと解釈されるようになり、その適用範囲が大きく広がったのである。しかるに、彼のこのアイデアは、「自然は尺度のスケール変換に対してその観測量との間にべき乗則（あるいは逆べき乗則）を有する」という彼の長年のフィールドワークから得られた経験則に基づくものであり、実際、自然現象から社会現象に至るまで、非常に多くの系でそうしたべき乗則は現われる。このことから、このフラクタルという概念もまた自然現象の総合的な理解に向けて、新しい有用なツールとなり得る可能性を秘めていると考えられている。ただし、Mandelbrotのフラクタル次元は幾何学図形を介してのみ議論できるものであり、また、その値を厳密に求めることができるのは、その幾何学図形が自己相似性を有するものに限られる。それ故、フラクタル次元を用いて現象を解析しようとすると、その対象とする系を理想化し自己相似な図形を準備するということが必要になる。自己相似図形は非常に複雑な様相を呈するが、これは基本パターンの繰返しというあくまで規則性を前提とした上での複雑さであることを考慮すると、フラクタル的な現象とその複雑さをそのまま数理的に取り扱うことはフラクタル次元を用いても可能であるとは言えない。

では、この汎用性の高いと考えられるフラクタルという概念をどうすればより広範な科学の分野に適用していくことが出来るだろうか。このような着眼はごく自然な発想であり、また重要なモチベーションであるともいえる。すなわち、このフラクタルという概念をいったん幾何学図形から切り離し、適切な仕方でより一般的、かつ厳密に特徴付けることができれば、そこからフラクタル的な現象の新たな数理的側面が見えてくる可能性が考えられるのである。そうした試みの一つに、Ohyaによる状態のフラクタル次元の定式化が挙げられる[3, 4, 5]。これは相空間上の測度や密度作用素で表現されるような状態を特殊な場合として含む十分に一般的なものであり、それ故、通常の古典系や量子系の状態に対して、状態のフラクタル次元による解析が可能になるのである[5, 7, 8, 9, 10, 11, 12]。

実際には、状態のフラクタル次元は、幾何学図形のフラクタル次元の一つである容量次元に着目することによって、その拡張という形で与えられる。この容量次元は、Kolmogorov、Tihomirovによって導入された距離空間上の $\varepsilon$ -エントロピー[13]を用いて定義されると解釈することができるが、Ohyaは、この距離空間上の $\varepsilon$ -エントロピーの代わりに、やはりKolmogorovによって定式化された確率変数の $\varepsilon$ -エントロピーを、 $C^*$ -力学系上にその相互エントロピーを用いて拡張することにより[3]、状態のフラクタル次元を導入した[4, 5]。

ところで、一般に、Gekfand、Yaglomによって、二つの確率変数 $f$ 、 $g$ 間に共有される情報量 (i.e., 相互エントロピー  $I(f, g)$ ) は、その合成測度のRadon-Nikodym微分を用いて定式化されている[14]。このとき、確率変数 $f$ のエントロピー $S(f)$ は、 $S(f) = I(f, f)$ と与えられるが、この場合、ほとんどのケースにおいて、 $S(f) = \infty$ であり、よってエントロピーそのものは、このままでは解析することができない。そこで、Kolmogorovは、エントロピー $S(f)$ の有限な評価値を与える指標として、確率変数に対し $\varepsilon$ -エントロピーの概念を導入したのであった[2]。

さて、通常、古典系の通信理論では、実際に我々が観測する信号というものは符号化され定量的に扱われるので、その抽象として、メッセージ空間（例えば、アルファベットの集合等）から実数上に値を取る確率変数をベースに議論される。よって、上述の確率変数の相互エントロピー $I(f, g)$ は、通信理論においても重要な役割を演じることになる。しかし、一般に、入力系や出力系が持つ情報量というものは、量子力学の立場から見れば、それはあくまで状態 $\rho$ に対して直接考えられる量であり、すなわち、古典系であればその状態は測度 $\mu$ に対応する。Ohyaの状態の $\varepsilon$ -エントロピー及びフラクタル次元は、Kolmogorovの $\varepsilon$ -エントロピーを一般の量子力学系に拡張することで、直接状態に定義される情報量として与えられている。

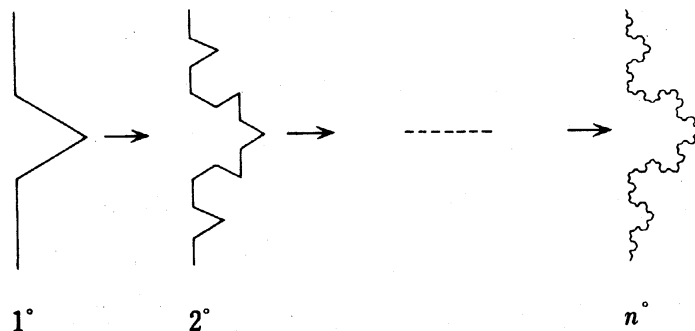
状態の $\varepsilon$ -エントロピーは、その定式化（§ 3 参照）からもわかるように、状態 $\rho$ が持つエントロピーの距離 $\varepsilon$ 近傍への伝達程度を表わす指標とみなすことができ、エントロピーが状態 $\rho$ の複雑さそのものを表わすと考えれば、状態の $\varepsilon$ -エントロピーは、エントロピーとは異なる視点から、状態 $\rho$ が持つ複雑さを表現するものである。すなわち、状態のフラクタル次元とは、エントロピーの距離 $\varepsilon$ に対する伝達程度という視点から、状態の持つフラクタル的な側面を測ろうとする指標と考えることができるのである。

さて、Ohyaの状態の $\varepsilon$ -エントロピーを、逆に、その特別な場合として連続な確率空間上に限定すると、前述したように、Ohyaの $\varepsilon$ -エントロピーは、直接、測度 $\mu$ に対して与えられ、そのことから、Kolmogorovの $\varepsilon$ -エントロピーとその定式化においていくつかの違いを生じる。そこで、この二つの $\varepsilon$ -エントロピーの厳密な比較を、1次元のGauss測度に対して行った結果[9, 10]を中心に紹介するのが本論文の内容である。確率変数を介する議論と直接測度を用いて行う議論との間に本質的な違いがなければ、二つの $\varepsilon$ -エントロピーの間にも大きな違いは生じないと思われる。しかし、我々は確率変数をベースに考える場合と、見方を変えて測度をベースに論じる場合には、 $\varepsilon$ -エントロピーの情報量としての評価にフラクタルという概念を介して異なる結果が生じることを示した。また、最後に、確率測度（分布）のフラクタル次元を用いた解析に関して、その適用例をいくつか簡単に紹介する[7, 11]。

## § 1 幾何学図形のフラクタル次元

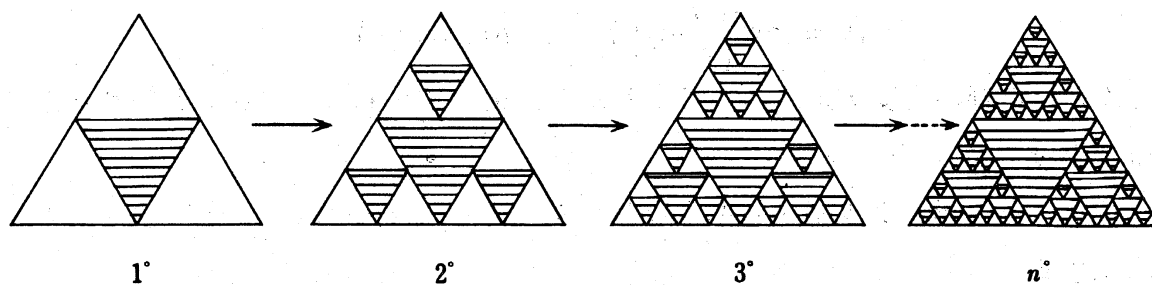
フラクタル次元が厳密に定義かつ計算できるのは、その図形が、ある基本図形（基本パターン）の繰り返しによって構成されている図形（i.e., 自己相似な図形）の場合である[1, 15, 16, 17]。その典型的な例として次の二つの図形を説明する。

（例1）コッホ曲線：



$n \rightarrow \infty$ の極限で作られる曲線を想像すると、それは至るところ微分不可能で、その一部は全体と相似になっていることがわかる。

(例2：シルピンスキーのギャスケット)



これは、正三角形から1°の様に斜線の部分を繰り抜いて作られた基本図形を繰り返し作っていくことによってできる複雑な図形である。

それでは、このような図形はどのように特徴付けられるのであろうか。また、コッホ曲線と直線の違いをどのように定量的に示せるのだろうか。これらの問いに対して、フラクタル次元が有効な指標となる。

#### (1) 尺度次元 (Scaling dimension)

いま、ある基本図形より作られた対象（自己相似な図形）が非常に粗い尺度（これを”1”とする）で見たとき、その基本図形の個数を  $N(1)$  とし、尺度  $r$  で見たときのそれを  $N(r)$  とする。このとき、

$$d_s \equiv \log \frac{N(r)}{N(1)} / \log \frac{1}{r} \quad (1.1)$$

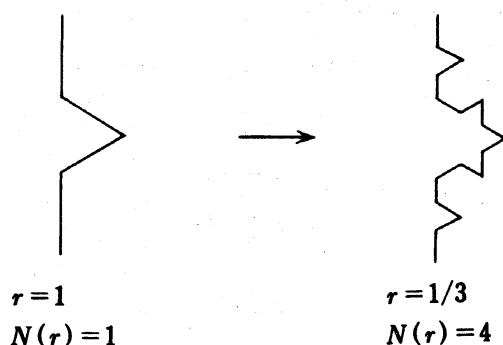
を尺度次元という。

これを定めた”心”は、雲や山の形、あるいは海岸線や樹木において、次の関係式が成立することによる。

$$N(r) \approx r^{-d_s} N(1) \quad (1.2)$$

コンピュータシミュレーションにより得られるフラクタル図形の中には、自然の形態を非常に良く模倣するものがあるが、自然が関係式(1.2)に準じるからこそ、そうした図形が自然を近似するということができる。

では、実際に上に挙げたフラクタル図形の尺度次元を求めてみよう。コッホ曲線の尺度次元は、

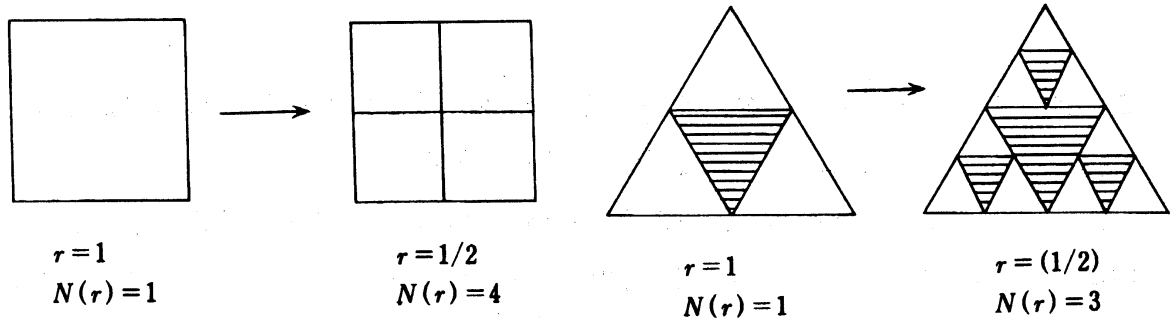


であるから、

$$d_s = \log \frac{4}{1} / \log \left( \frac{1}{\frac{1}{3}} \right) = \log 4 / \log 3$$

となる。直線の尺度次元  $d_s$  は 1 であるから、 $d_s$  を用いれば、コッホ曲線と直線の区別が可能である。

次に、正方形、シルピンスキーのギャスケット、それぞれの尺度次元は、次のように求まる。



正方形の尺度次元 ;  $d_s = \log \frac{4}{1} / \log \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = 2$

シルピンスキーのギャスケット ;  $d_s = \log \frac{3}{1} / \log \left( \frac{1}{\frac{1}{2}} \right) = \log 3 / \log 2$

## (2) 容量次元 (Capacity dimension)

ある集合  $X$  ( $\subset R^d$ ) を直径  $\varepsilon$  の凸集合 (立方体、球など) で被覆するのに必要なその凸体の最小個数を  $N(\varepsilon)$  とする。このとき、

$$d_c \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \quad (1.3)$$

を容量次元という。

ここで、式 (1.3) の分子  $\log N(\varepsilon)$  は、実は、距離空間上の  $\varepsilon$ -エントロピー [13] と見なすことのできるものである。すなわち、容量次元は情報量によって定まる次元である。この容量次元を用いて、コッホ曲線のフラクタル次元を求めてみる。

コッホ曲線を直径  $(1/3)^n$  の円で覆うことを考える。直径  $\varepsilon = 1/3$  の円で覆うとき、必要な円の個数は  $N(\varepsilon) = 4$  で、直径  $\varepsilon = (1/3)^2$  の円で覆うとき、必要な円の個数は  $N(\varepsilon) = 4^2$  となるので一般に、直径  $\varepsilon = (1/3)^n$  の円で覆うとき、必要な円の個数は  $N(\varepsilon) = 4^n$  となる。故に、

$$\begin{aligned} d_c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \log 4^n / \log \left( \frac{1}{(1/3)^n} \right) \right\} \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log 4^n}{\log 3^n} = \frac{\log 4}{\log 3}$$

シルピンスキーのギヤスケットについても同様に計算することができ、その容量次元は、 $d_c = \log 3 / \log 2$ である。

このように、Kolmogorovが導入した情報量としての距離空間上の $\varepsilon$ -エントロピーは、上の例から、図形の持つ複雑さを表す指標としても有用であることが分かる。確かに、歴史的に見れば、Kolmogorovは何も非整数値をとり得る容量次元を定式化しようと $\varepsilon$ -エントロピーを導入したわけではないが、これは、エントロピーが系の持つ複雑さ記述しうる汎用性の高い概念だということの、まさにその端的な一例であるといえるだろう。また、逆に、フラクタルという概念が、事象の持つ複雑さがある側面から確かに表現できるものであるのならば、何らかの仕方で、エントロピーという概念と関係してくるのは、それはある意味では当然と言えるのかも知れない。

さて、序論でも述べたように、Kolmogorovは連続的な確率変数に対する情報量という視点から、この $\varepsilon$ -エントロピーという概念を、連続な確率空間上にも導入している[2]。まず、次節で、Kolmogorovの確率変数の $\varepsilon$ -エントロピーについて復習し、確率変数の $\varepsilon$ -エントロピーを状態空間上に拡張することによって得られる、状態の $\varepsilon$ -エントロピーと状態のフラクタル次元[3, 4, 5, 9]について解説する。

## § 2 Kolmogorov の確率変数の $\varepsilon$ -エントロピー

確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ 上で定式化されるKolmogorovの確率変数の $\varepsilon$ -エントロピーは、相互エントロピーを用いて表される。

いま、確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ の $\Omega$ 上の確率変数 $f, g$ を各々ある可測空間 $(X, \mathfrak{F}_X)$ 、 $(Y, \mathfrak{F}_Y)$ に値を取る確率変数とし、 $\mu_f, \mu_g$ を $f, g$ から導かれる確率分布、 $\mu_{f,g}$ を $f$ と $g$ の結合確率分布、 $\mu_f \otimes \mu_g$ を $f$ と $g$ の直積分布とする。このとき、 $\mu_{f,g} \ll \mu_f \otimes \mu_g$  (i.e.,  $\mu_{f,g}$ は $\mu_f \otimes \mu_g$ に関して絶対連続)であるから、 $\mu_f \otimes \mu_g$ に関する $\mu_{f,g}$ のRadon-Nikodym微分： $\frac{d\mu_{f,g}}{d\mu_f \otimes \mu_g}$ が一意に存在して、確率変数 $f$ と $g$ の相互エントロピー $I(f, g)$ は、

$$I(f, g) = \int_X \int_Y \frac{d\mu_{f,g}}{d\mu_f \otimes \mu_g} \log \frac{d\mu_{f,g}}{d\mu_f \otimes \mu_g} d\mu_{f,g} \quad (2.1)$$

と表される[14]。

古典連続系の確率変数 $f$ のエントロピー $S(f)$ は、この相互エントロピーを用いて次式で表される。

$$S(f) = I(f, f) \quad (2.2)$$

このとき、 $S(f)$ は、 $f$ が連続な密度関数を持てば、ほとんどの場合、発散する。そこで、 $f$ の持つ情報量の一つの指標として、Kolmogorovは確率変数  $f$  の  $\varepsilon$ -エントロピー  $S_{\text{Kolmogorov}}(f; \varepsilon)$  (以下、 $S_K(f; \varepsilon)$ と略) を次のように与えた[2]。

[定義 2-1-1] 確率変数  $f$  の  $\varepsilon$ -エントロピー  $S_K(f; \varepsilon)$  ;

$$S_K(f; \varepsilon) \equiv \inf \{ I(f, g); g \in M_d(f, \varepsilon) \} \quad (2.3)$$

ただし、

$$M_d(f, \varepsilon) = \left\{ g \in M_Y(\Omega); \sqrt{\int d(f, g)^2 d\mu_{f, g}} \leq \varepsilon \right\}$$

ここで、 $M_Y(\Omega)$ は $\Omega$ 上で定義され、可測空間 $(Y, \mathfrak{F}_Y)$ に値を取る確率変数の全体、 $d(f, g)$ は $f$ と $g$ の距離である。例えば、 $n$ 次元確率変数  $f = (f_1, \dots, f_n)$ 、 $g = (g_1, \dots, g_n)$ に対して、

$$d(f, g) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |f_i - g_i|^2}$$

で与えられる。

### § 3 古典連続系の状態の $\varepsilon$ -エントロピーとフラクタル次元

前節の議論は、確率空間 $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$ を一つに固定し、確率変数を介すことによって、二つの可測空間 (i.e., Lebesgue測度空間) 上での情報量の議論に帰着されていた。Shannonにより始まったGauss型通信路の研究を中心とする、実際の工学的な通信路との対応を考えると、上述の設定は十分に有用な結果を与えるが、通信における数理解析の手法としては、より一般的な確率空間上でのチャンネル(通信路)の議論もまた重要である。そこで、ここでは、一般的な確率空間上でのチャンネルを用いた相互エントロピーを復習し、その表現を用いて状態の  $\varepsilon$ -エントロピーとフラクタル次元を定式化する。ただし、状態の  $\varepsilon$ -エントロピー及びフラクタル次元は、本来であれば、その最も一般的な定式化として $C^*$ -力学系上に導入され、その特別なケースとして、確率空間上のフラクタル次元は導かれるのであるが、本論文においては、 $C^*$ -力学系上の議論はその必要性を感じないので、直接、確率空間上の定式化を行うこととする。 $C^*$ -系に興味のある方は、文献[5, 8]を参照していただきたい。

可測空間 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 、 $(\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}})$ を各々入力空間、出力空間とし、 $P(\Omega)$ 、 $P(\overline{\Omega})$ を各々 $(\Omega, \mathfrak{F})$ 、 $(\overline{\Omega}, \overline{\mathfrak{F}})$ 上の確率測度の全体とする。いま、 $P(\Omega) \rightarrow P(\overline{\Omega})$ への写像 $\Lambda^*$ を

$$\Lambda^*(\mu(\bullet)) \equiv \int_{\Omega} \lambda(x, \bullet) \mu(dx) \quad (3.1)$$

と定める。ここで、 $\lambda$ は $\Omega \times \overline{\mathfrak{F}} \rightarrow [0, 1]$ の写像で次の条件を満たすものとする。

(1) 各  $x \in \Omega$  に対して、 $\lambda(x, \bullet) \in P(\overline{\Omega})$ 。



(2) 各  $Q \in \overline{\mathfrak{F}}$  に対して、 $\lambda(\bullet, Q)$  は  $\overline{\mathfrak{F}}$ -可測関数。

このとき、式(3.1)で与えられる写像  $\Lambda^*$  はチャンネルと呼ばれ、古典的な通信理論における通信路の最も一般的な数理表現を与えるものである。

このチャンネル  $\Lambda^*$  によって、入力状態  $\mu$  (i.e., 測度) が出力状態  $\Lambda^*\mu$  に変換されたとき、各々の状態の相関を表す合成状態 (i.e., 結合確率測度)  $\Phi(\bullet, \bullet)$  は、チャンネル  $\Lambda^*$  を用いて、次のように表すことができる。

$$\Phi(\bullet, \bullet) = \int \lambda(x, \bullet) \mu(dx) \quad (3.2)$$

また、その直積測度  $\Phi_0(\bullet, \bullet)$  は、

$$\Phi_0(\bullet, \bullet) = \mu(\bullet) \otimes \Lambda^*\mu(\bullet) \quad (3.3)$$

である。このとき、入力状態  $\mu$  のチャンネル  $\Lambda^*$  に関する相互情報量  $I(\mu; \Lambda^*)$  は、

$$I(\mu; \Lambda^*) = S(\Phi | \Phi_0) \quad (3.4)$$

ただし、

$$S(\Phi | \Phi_0) = \int_{\Omega \times \bar{\Omega}} \frac{d\Phi}{d\Phi_0} \log \frac{d\Phi}{d\Phi_0} d\Phi$$

ここで、 $\frac{d\Phi}{d\Phi_0}$  は Radon-Nikodym 微分 ( $\because \Phi \ll \Phi_0$ ) である。

上で与えた、チャンネル  $\Lambda^*$  とその相互エントロピー  $I(\mu; \Lambda^*)$  を用いて、我々は状態  $\mu$  の  $\mathcal{E}$ -エントロピー  $S_{\text{Ohy}}(\mu; \mathcal{E})$  (以下、 $S_0(\mu; \mathcal{E})$  と略) を次のように定式化することができる[3, 9]。

いま、 $\mathfrak{C}$  をチャンネル  $\Lambda^* : P(\Omega) \rightarrow P(\bar{\Omega})$  の全体とする。

[定義 3-1] 状態  $\mu$  の  $\mathcal{E}$ -エントロピー  $S_0(\mu; \mathcal{E})$  ;

$$S_0(\mu; \mathcal{E}) \equiv \inf \{ J(\mu; \Lambda^*); \Lambda^* \in \mathfrak{C}, \|\mu - \Lambda^*\mu\| \leq \mathcal{E} \} \quad (3.5)$$

ただし、 $\|\bullet\|$  は  $P(\Omega)$  上のあるノルムであり、

$$J(\mu; \Lambda^*) \equiv \sup \{ I(\mu; \Gamma^*); \Lambda^*\mu = \Gamma^*\mu \} \quad (3.6)$$

ここで、 $J(\mu; \Lambda^*)$  は極大相互エントロピーと呼ばれる。 $J(\mu; \Lambda^*)$  が  $\sup$  をとる理由は、チャンネルを通して移すことのできる情報量は大きい方が好ましいからである (例えば、通信理論における通信路の効率等)。また、直接チャンネルを用いずに次のように  $\mathcal{E}$ -エントロピーを定式化することもできる。

$$S_0(\mu; \mathcal{E}) \equiv \inf \{ J(\mu, \mu'); \mu' \in P(\bar{\Omega}), \|\mu - \mu'\| \leq \mathcal{E} \} \quad (3.5')$$

ただし、

$$J(\mu, \mu') \equiv \sup \{ I(\mu, \mu'); \Phi_{\mu\mu'} \ll \mu \otimes \mu' \} \quad (3.6')$$

このとき、式(3.5)と(3.5')は一致する。実際、 $\mu' = \Lambda^*\mu$  なる  $\Lambda^*$  が存在し、

$\Lambda^* \mu = \Gamma^* \mu$  を満たす  $\Gamma^*$  による合成測度の全体と  $\Phi_{\mu, \mu} \ll \mu \otimes \mu$  を満たす  $\Phi_{\mu, \mu}$  の集合は等しい。

Kolmogorov の  $\mathcal{E}$ -エントロピーの定式化 (式(2.3)) を見れば明らかなように、彼の  $\mathcal{E}$ -エントロピーには、極大相互エントロピーの概念は登場しない。確率変数をベースにして考えた場合、確率変数  $f, g$  から導かれる確率測度  $\mu_f, \mu_g$  の合成測度  $\mu_{f, g}$  は、

$$\mu_{f, g}(A \times B) = \mu(f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)) \quad (\forall A \in X, \forall B \in Y)$$

と一意に定まり、それに対応してチャネルも一意に固定されてしまうので、確かにこうした状況においては極大相互エントロピーを考える必要はなさそうである。しかし、状態の持つ情報量の変化という立場から、状態を特徴付けようとするとき、距離  $\mathcal{E}$  によって特定されたある状態に移すことのできるチャネルの同値類を考え、その中での効率をも考慮するといった視点は、通信理論の観点からしても新しい見方を提供する可能性が考えられるのである。(Kolmogorov においては、チャネルに対する考察は希薄なように思われる。)

ここで、我々は状態の  $\mathcal{E}$ -エントロピーを用いて、状態のフラクタル次元を次のように与えることができる[4, 5, 9]。

[定義 3-2] 容量次元；

$$d_c^0(\mu) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{S_0(\mu; \varepsilon)}{\log 1/\varepsilon} \quad (3.7)$$

## § 4 Gauss 確率空間上での Kolmogorov $\mathcal{E}$ -エントロピーと

### Ohya $\mathcal{E}$ -エントロピーの比較

この節では、実可分な Hilbert 空間上の Gauss 測度に対して、Kolmogorov、Ohya 各々の  $\mathcal{E}$ -エントロピーを計算しその比較を行う。

$\mathcal{H}$  を実可分な Hilbert 空間、 $\mathcal{B}$  を  $\mathcal{H}$  上の Borel  $\sigma$ -集合体とし、 $\mu$  を  $\mathcal{B}$  上の Borel 確率測度で、 $\int_{\mathcal{H}} \|x\|^2 d\mu(x) < \infty$  を満たすものとする。いま、 $\mathcal{H}$  の任意の元  $x_1, x_2$  に対して、 $m_\mu \in \mathcal{H}$ 、 $R_\mu \in B(\mathcal{H})$  (i.e., 有界線形作要素) が一意に存在して、

$$(1) \quad \langle x_1, m_\mu \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle x_1, y \rangle \mu(dy)$$

$$(2) \quad \langle x_1, R_\mu x_2 \rangle = \int_{\mathcal{H}} \langle x_1, y - m_\mu \rangle \langle y - m_\mu, x_2 \rangle \mu(dy)$$

を満たす。このとき、 $\mathcal{H}$  上の Gauss 測度  $\mu$  は次のように与えられる。

[定義 4-1]

$\mu$  が  $\mathcal{H}$  上の Gauss 測度であるとは、 $\mu$  は  $\mathcal{B}$  上の Borel 測度であり各  $x \in \mathcal{H}$  に対し

て、実数値  $m_x$ 、 $\sigma_x$  ( $>0$ ) が存在して、

$$\mu\{y \in \mathcal{H}; \langle y, x \rangle \leq a\} = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_x}} e^{-\frac{(t-m_x)^2}{2\sigma_x}} dt \quad (4.1)$$

このとき、 $\mu$  の特性関数は、

$$\hat{\mu}(x) = \exp\left\{i\langle x, m_\mu \rangle - \frac{1}{2}\langle x, R_\mu x \rangle\right\}$$

ここで、 $R_\mu \in T(\mathcal{H})_+$  (i.e., 正なトレースクラス作用素)。

以下、平均  $m$ 、共分散作用素  $R$  の Gauss 測度  $\mu$  を  $\mu = [m, R]$  と書くことにする。

次に、Gauss 測度  $\mu$  を別の Gauss 測度に移すような Gaussian チャネルについて解説する[18, 19, 20, 21, 22]。

$(\mathcal{H}_1, \mathfrak{B}_1)$ 、 $(\mathcal{H}_2, \mathfrak{B}_2)$  を各々入力空間、出力空間とし、 $P_G^K$  を  $(\mathcal{H}_k, \mathfrak{B}_k)$  上の Gauss 測度の全体とする。このとき、Gaussian チャネル  $\Lambda^*$  は次のように定式化される。

[定義 4-2]

写像  $\Lambda^*: P_G^1 \rightarrow P_G^2$  が、入力状態  $\mu_1 \in P_G^1$  に対して、測度  $\mu_0 = [0, R_0] \in P_G^2$  を用いて次のように書けるととき、写像  $\Lambda^*$  を Gaussian チャネルと呼ぶ。

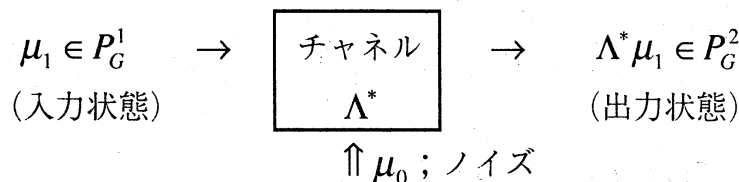
$$\Lambda^* \mu_1(Q) = \int_{\mathcal{H}_1} \lambda(x, Q) \mu_1(dx) \quad (4.2)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \lambda(x, Q) &\equiv \mu_0(Q^x) \\ Q^x &\equiv \{y \in \mathcal{H}_2, Ax + y \in Q\} \quad (x \in \mathcal{H}_1, Q \in \mathfrak{B}_2) \end{aligned}$$

ここで、 $A$  は  $\mathcal{H}_1$  から  $\mathcal{H}_2$  への線形作用素。

Gaussian チャネル  $\Lambda^*$  を特徴付ける測度  $\mu_0$  はチャネル  $\Lambda^*$  のノイズを表す。すなわち、Gaussian チャネル  $\Lambda^*$  による状態変化は下の図のようなものである。



このとき、入力状態  $\mu_1$  と出力状態  $\Lambda^* \mu_1$  の合成状態  $\mu_{1,2}$  は、

$$\mu_{1,2}(Q_1 \times Q_2) = \int_{\mathcal{H}_1} \lambda(x, Q_2) \mu_1(dx) \quad (Q_1 \in \mathfrak{B}_1, Q_2 \in \mathfrak{B}_2)$$

と表せる。

以下、平均 0 の一次元 Gauss 測度に限って話を進める。

$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = R$  とし、入力状態  $\mu_1$  を  $\mu_1 = [0, \sigma_1^2] \in P_G^1$ 、チャネル  $\Lambda^*$  のノイズを  $\mu_0 = [0, \sigma_0^2] \in P_G^2$ 、その線形作用素を  $A = \beta \in R$  とする。このとき、チャネル  $\Lambda^*$  による出力状態  $\Lambda^* \mu_1$ 、及び相互エントロピー  $I(\mu_1; \Lambda^*)$  は、次のように求まる。

$$\Lambda^* \mu_1 = [0, \beta^2 \sigma_1^2 + \sigma_0^2] \quad (4.3)$$

$$I(\mu_1; \Lambda^*) = \frac{1}{2} \log \frac{\beta^2 \sigma_1^2 + \sigma_0^2}{\sigma_0^2} \quad (4.4)$$

一般に、相互エントロピーは、入力状態  $\mu_1$  の共分散作用素を  $A_1$ 、出力状態  $\Lambda^* \mu_1$  の共分散作用素を  $A_2$ 、合成状態の共分散作用素を  $A_{1,2}$  とすると、

$$I(\mu_1; \Lambda^*) = \log \frac{|A_1| |A_2|}{|A_{1,2}|}$$

と求まる[14]ことが知られているが、式(4.4)においては、

$$|A_1| = \sigma_1^2, |A_2| = \beta^2 \sigma_1^2 + \sigma_0^2, |A_{1,2}| = \sigma_1^2 \sigma_0^2$$

と計算できる。

以下、KolmogorovとOhyaの $\varepsilon$ -エントロピーの比較を行おう。まず、二人の $\varepsilon$ -エントロピーの定式化に目を向けると、式(2.3)と式(3.5)を見れば、その違いは次の2点であることが分かる。

- (1) Kolmogorovの $\varepsilon$ -エントロピーは、距離 $\varepsilon$ を確率変数の距離として与えるのに対し、Ohyaの $\varepsilon$ -エントロピーは、距離 $\varepsilon$ を測度の距離として与える。
- (2) Ohyaの $\varepsilon$ -エントロピーは、 $\Lambda^* \mu = \Gamma^* \mu$ を満たすチャネル $\Lambda^*$ の同値類を考え、その集合の $\sup$ を取った極大相互エントロピーという概念を介して定式化されている。

まず、Ohyaの $\varepsilon$ -エントロピーにおいてもKolmogorovと同様に、距離 $\varepsilon$ を確率変数間の距離として与えると、次の定理が成立する[10]。

<定理 4.1> 確率変数  $f$  によって導かれる入力状態  $\mu_f$  を、 $\mu_f = [0, \sigma_1^2]$  と与える。このとき、

$$\|\mu_f - \mu_g\| = \sqrt{\int_{R \times R} d(f, g)^2 d\mu_{f, g}}$$

とすると、

$$\begin{aligned} S_0(\mu; \varepsilon) &= S_K(f; \varepsilon) \\ &= \begin{cases} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \sigma_1 & (\varepsilon < \sigma_1) \\ 0 & (\varepsilon \geq \sigma_1) \end{cases} \\ d_C^0(\mu_f) &= d_C^K(f) = 1 \end{aligned} \quad (4.5)$$

(略証) いま、Gaussian チャンネル  $\Lambda^*$  は二つの確率変数間の条件付き確率密度関数が、

$$p_{g|f}(y|x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(y-\beta x)^2}{2\sigma_0^2}} \quad (x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2)$$

と与えられた場合に対応しているが、実際、 $\mu_{f,g}$  はこの条件付き確率密度関数と入力状態  $\mu_f$  の密度関数の積を用いて表せる。よって、

$$\sqrt{\int_{R \times R} d(f,g)^2 d\mu_{f,g}} = \sqrt{(1-\beta)^2 \sigma_0^2 + \sigma_1^2}$$

と計算することができ、 $\sqrt{\int_{R \times R} d(f,g)^2 d\mu_{f,g}} = \varepsilon$  を満たす確率変数  $g$  により導かれる測度  $\mu_g$  への変換を与えるチャンネル  $\Lambda^*$  は、 $\sqrt{(1-\beta)^2 \sigma_0^2 + \sigma_1^2} = \varepsilon$  を満たす。すなわち、条件  $\sqrt{\int_{R \times R} d(f,g)^2 d\mu_{f,g}} = \varepsilon$  のもとで、 $\Lambda^* \mu_f = \Gamma^* \mu_f = \mu_g$  を満たすチャンネルは  $\varepsilon$  の関数として一意に特定される。よって、

$$J(\mu_f; \Lambda^*) = I(\mu_f; \Lambda^*)$$

が成立し、距離  $\varepsilon$  を確率変数間の距離として与える限り、Ohya の  $\varepsilon$ -エントロピーと Kolmogorov の  $\varepsilon$ -エントロピーは一致する。式 (4.5) の計算は文献[19, 23] による。

(Q.E.D)

<定理 4.1> は、 $n$  次元の Hilbert 空間  $R^n$  上の Gauss 測度に対しても成立し、そのときのフラクタル次元は  $n$  になる。すなわち、次の定理が成立する[9]。

<定理 4.1'> 入力状態  $\mu_f = [0, R]$  は、 $n$  次元確率変数  $f = (f_1, \dots, f_n)$  から導かれる測度であり、そのチャンネル  $\Lambda^*$  による出力状態を、 $\Lambda^* \mu_f = \mu_g$  と  $n$  次元確率変数  $g = (g_1, \dots, g_n)$  による測度とする。この時、二つの状態  $\mu_f$  と  $\mu_g$  の距離が

$$\|\mu_f - \mu_g\| = \sqrt{\int_{R^n \times R^n} d(f,g)^2 d\mu_{f,g}}$$

で与えられるとき、

$$(1) \quad S_0(\mu_f; \varepsilon) = S_K(f; \varepsilon) \\ = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log \max\left(\frac{\lambda_i}{\theta^2}, 1\right)$$

ここで、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  は共分散作用素  $R$  の固有値であり、 $\theta^2$  は等式  $\sum_{i=1}^n \min(\lambda_i, \theta^2) = \varepsilon^2$  から一意に決る定数。

$$(2) \quad d_C^0(\mu_f) = d_C^K(\mu_f) = n$$

この定理の詳しい証明は文献[9]にゆずるとして、ここでは  $n$  次元の Gauss 測度の場合、そのチャンネルによる合成状態はどのように与えられるか、その確認のみしてお

こう。まず、チャネルを表わす条件付き確率測度が、

$$p_{g|f}(y|x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{|R_0|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(y-Ax)R_0^{-1}(y-Ax)^t\right\} \quad x, y \in R^n,$$

と与えられ、それ故、このときの入力と出力の合成状態  $\mu_{f,g}$  は、次のように求まる。

$$\mu_{f,g}(Q_1 \times Q_2) = \int_{Q_1 \times Q_2} \frac{1}{(2\pi)^n \sqrt{|C|}} \exp\left\{-\frac{1}{2}zC^{-1}z^t\right\} dz \quad Q_1, Q_2 \in \mathcal{B}(R^n),$$

ここで、 $z$  は  $2n$  次元の確率変数ベクトル  $(x, y) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$  であり、 $C$  は以下のように与えられる  $\mu_{f,g}$  の共分散行列ある。

$$C = \begin{pmatrix} R & RA^t \\ AR & ARA^t + R_0 \end{pmatrix}$$

ここで、 $R$ 、 $RA^t$ 、 $AR$ 、 $ARA^t + R_0$  はそれぞれ、 $(R)_{ij} = E(f_i f_j)$ 、 $(RA^t)_{ij} = E(f_i g_j)$ 、 $(AR)_{ij} = E(g_i f_j)$ 、 $(ARA^t + R_0)_{ij} = E(g_i g_j)$  となる  $n \times n$  行列である。

<定理 4.1> 同様、上記のように与えられる合成測度 (i.e., チャネル) においても、 $\Lambda^* \mu_f = \Gamma^* \mu_f$  (i.e.,  $\|\Lambda^* \mu_f - \Gamma^* \mu_f\| = 0$ ) を満たすものは一意に定まることが示され、よって、上の定理が成立するのである。

以上、Ohya の  $\varepsilon$ -エントロピーは、Kolmogorov の  $\varepsilon$ -エントロピーを特殊なケースとして含むということができる。二つの確率変数が与えられれば、その合成測度が一意に決る (i.e., チャネルが一意に決る) ということは、状態の  $\varepsilon$ -エントロピーの定式化のところでも解説したが、ここではそれをチャネルによる合成測度という点から確かめたことになる。また、 $\varepsilon$ -エントロピーの  $\varepsilon \rightarrow 0$  におけるその漸近的な挙動としてのフラクタル次元を求めると、その値は 1 ( $n$  次元の場合は  $n$ ) であり、Hilbert 空間の次元に等しい。すなわち、状態のフラクタル次元は従来の意味での次元を表わすことが分かる。ただし、この場合はその次元は非整数値とはならず、Gauss 測度が、もし、その”半端な (i.e., フラクタル的な)”側面を有しているとしても、ここではそれを見ることはできない。そこで、状態 (測度) の距離をその自然な与え方として、全変動ノルムを用いて与えると次の定理が成立する [9, 10]。

<定理 4.2> 入力状態  $\mu_f$  は、 $\mu_f = [0, \sigma_1^2]$  と与えられ、状態間の距離が全変動ノルム  $|\bullet|(\Omega)$  を用いて与えられるとする。i.e.,

$$\|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| = |\mu_f - \Lambda^* \mu_f|(\Omega)$$

いま、任意の  $\delta$  ( $0 \leq \delta \leq \varepsilon$ ) に対して、 $\|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| = \delta$  のとき、チャネル  $\Lambda^*$  は、

$$\beta^2 \leq \frac{\sigma_\delta^2 - \delta}{\sigma_1^2}$$

(ここで、 $\sigma_\delta^2$  は  $\|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| = \delta$  のときの  $\Lambda^* \mu_f$  の分散。)

を満たすとする、

$$S_0(\mu_f; \varepsilon) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \sigma_1 - \log \left( 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\varepsilon + O(\varepsilon)) \right) \geq S_K(f; \varepsilon) = 0$$

(ただし、 $O(\varepsilon)$ は、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき  $O(\varepsilon) \rightarrow 0$ 。)

$$d_C^0(\mu_f) = \frac{1}{2} \geq d_C^K(\mu_f) = 0$$

(略証) 距離  $\varepsilon$  を全変動ノルムで与えると、

$$\begin{aligned} \|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| &= |\mu_f - \Lambda^* \mu_f|(R) \\ &= 4 \int_0^a \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2)}} \right| dx \\ &\quad \left( \text{ここで、} a = \sqrt{\left( \frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2} \right)^{-1} \log \frac{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2}{\sigma_1^2}} \right) \end{aligned}$$

となるから、チャネル  $\Lambda^*$  を  $\Lambda^*(\beta, \sigma_0^2)$  と  $\beta$ 、 $\sigma_0^2$  に準じて表記すると、

$$\begin{aligned} \{\Lambda^*; \|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| \leq \varepsilon\} &= \\ &\left\{ \Lambda^*(\beta, \sigma_0^2); 4 \int_0^a \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2)}} \right| dx \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

と書くことができる。ただし、上式の  $|\bullet|$  の中の関数は、エラー関数であり一般に積分できないため、このままではチャネル  $\Lambda^*$  を  $\varepsilon$  の関数として表すことができない。

しかし、このエラー関数のグラフの形、及び  $x-1 \geq \log x$  を考慮すると、次の評価式を得ることができる。

$$\|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| < \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2} - \sigma_1}{\sigma_1} & (\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2 > \sigma_1^2) \\ \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sigma_1 - \sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2}}{\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2}} & (\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2 < \sigma_1^2) \end{cases}$$

まず、 $\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2 > \sigma_1^2$  の場合を考える。このとき、チャネル  $\Lambda^*(\beta, \sigma_0^2)$  が、

$$4 \int_0^a \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2}} e^{-\frac{x^2}{2(\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2)}} \right| dx = \varepsilon$$

を満たせば、 $\varepsilon \rightarrow 0$  のとき  $O(\varepsilon) \rightarrow 0$  なる  $\varepsilon$  の関数  $O(\varepsilon)$  が一意に存在して、

$$\frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2} - \sigma_1}{\sigma_1} = \varepsilon + O(\varepsilon) \quad (*)$$

が成立することが分かる。すなわち、

$$\begin{aligned} \{\Lambda^*; \|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| \leq \varepsilon\} &= \\ &\left\{ \Lambda^*(\beta, \sigma_0^2); \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2\sigma_1^2 + \sigma_0^2} - \sigma_1}{\sigma_1} = \varepsilon_1 + O(\varepsilon_1), 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon \right\} \end{aligned}$$

よって、我々は、 $\varepsilon$ に関するオーダー $O(\varepsilon)$ を介せば、チャンネルを特定することができる。このとき、式(\*)を満たすチャンネル $\Lambda^*(\beta, \sigma_0^2)$ において、

$$\begin{aligned}\Lambda^* \mu_f &= \Gamma^* \mu_f \Leftrightarrow |\Lambda^*(\beta, \sigma_0^2) \mu_f - \Lambda^*(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2) \mu_f|(\Omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \beta^2 \sigma_1^2 + \sigma_0^2 = \bar{\beta}^2 \sigma_1^2 + \bar{\sigma}_0^2\end{aligned}$$

となるチャンネルの同値類 $\Lambda^*(\bar{\beta}, \bar{\sigma}_0^2)$ が存在するので、その $\sup$ をとって極大相互エントロピーを計算すると、チャンネルの条件より、

$$J(\mu_f; \Lambda^*) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \sigma_1 + \log \left( 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\varepsilon + O(\varepsilon)) \right)$$

同様にして、 $\beta^2 \sigma_1^2 + \sigma_0^2 < \sigma_1^2$ であれば、

$$J(\mu_f; \Lambda^*) = \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \sigma_1 - \log \left( 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\varepsilon + O(\varepsilon)) \right)$$

よって、 $J(\mu_f; \Lambda^*)$ は $\varepsilon$ に関して単調減少であることから、

$$\begin{aligned}S(\mu_f; \varepsilon) &= \inf_{\Lambda^*} \left\{ J(\mu_f; \Lambda^*); \|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| \leq \varepsilon \right\} \\ &= \inf_{0 \leq \bar{\varepsilon} \leq \varepsilon} \left\{ \frac{1}{2} \log \frac{1}{\bar{\varepsilon}} + \log \sigma_1 - \log \left( 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\bar{\varepsilon} + O(\bar{\varepsilon})) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \sigma_1 - \log \left( 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (\varepsilon + O(\varepsilon)) \right) \quad (\text{Q.E.D.})\end{aligned}$$

距離 $\varepsilon$ を全変動ノルムで与えると、 $\Lambda^* \mu_f = \Gamma^* \mu_f$ を満たすチャンネルは一つに特定されず、よって、極大相互エントロピーの概念が本質的な役割を演ずる。というのも、極大相互エントロピーを介さず直接 $\inf$ を取ると、任意の $\varepsilon$ に対して、 $\varepsilon$ -エントロピーは常に0になってしまう（すなわち、入力状態と出力状態の間の相関が0のチャンネルに対応してしまう）からである。また、ここで得られたオーダー $\varepsilon$ の $\varepsilon$ -エントロピーの評価値は、確率変数で距離を与えた場合とは異なる評価を与え、その漸近的な挙動としてのフラクタル次元の値は $\frac{1}{2}$ と非整数値を取る。すなわち、Gauss測度のフラクタル的な側面が顕著に姿を表す。

さて、<定理 4.2>のチャンネルの条件は、 $\|\mu_f - \Lambda^* \mu_f\| = \delta$ を満たすチャンネル $\Lambda^*$ のノイズが、下限 $\delta$ で押えられることに対応するが、この条件を外すと次の系が簡単に導かれる。

<系 4.3> チャンネルに条件を加えないと、任意の $\varepsilon \geq 0$ に対して、

$$S(\mu_f; \varepsilon) = \infty$$

これは、ノイズの効果を考えなければ、 $\varepsilon$ -エントロピーの値も常に発散してしまう



ということであり、エントロピー  $S(\mu_f)$  そのものが発散しているということを考えれば、情報理論の観点からも自然な結果と解釈できる (i.e., ノイズ = 0)。

## § 5 いくつかの応用例

以上、状態の  $\varepsilon$ -エントロピー (i.e., 状態のフラクタル次元) は、Kolmogorov の  $\varepsilon$ -エントロピーを特殊な場合として含む、より汎用性の高い新しい情報量と見なすことができ、状態の距離の与え方を変えることで (i.e., 見方を変えることで)、Gauss 測度の持つフラクタル的な側面を特徴付けることができた。

一見、従来の幾何学図形のフラクタル次元の直感的なイメージからすれば、状態のフラクタル次元に、“次元” という概念を簡単に重ねあわせることは、難しいように思われる。しかし、今回の結果から、その測度が持つ情報量を介して定式化される状態のフラクタル次元もまた、いわゆる次元としての指標の意味を合わせ持っていることがわかる。ただし、状態の  $\varepsilon$ -エントロピーや状態のフラクタル次元は、あくまでエントロピーとは異なる、情報量の伝達程度という角度からその状態が持つ複雑さを表現するという点が、何よりも大事な視点であると筆者は考えている。このエントロピーとは異なる複雑さという特徴が、実は様々な系の解析に、非常に有用な見方を与えることになるのである。以下、離散的な確率分布に対するその適用例を二つ簡単に紹介することにしよう。

### (1) 状態のフラクタル次元による、クレータ、河川の形状の分類[7]

月のクレータや河川については、フラクタル幾何学においても、様々な解析が試みられている。例えば、月面のクレータには様々な直径のクレータが存在しており、その頻度分布は、各々の月の海で若干異っているが、これらの月の海に対する幾何学図形のフラクタル次元を近似的に求めると、それは全ての海で等しく、ほぼ 2.0 という値が得られる[24]。そこで、各々の月の海に対して、様々な直径のクレータの頻度分布 (確率分布) を用いて、状態のフラクタル次元を求めると、それは各々の月の海で異なる値となり (図 (5-1))、我々は、その複雑さの度合いから月の海を大きく三つに分類することが出来る。ここでは、エントロピーも計算することが出来るが、状態の類似度を測るという点で、状態のフラクタル次元はエントロピーよりもより明確な指標となることがみてとれる。すなわち、情報量の伝達程度を表わす  $\varepsilon$ -エントロピーの  $\varepsilon$  に対する変化の度合いという視点から、その傾きを求めることによって各々のクレータの頻度分布をより明確に分類できるからである。

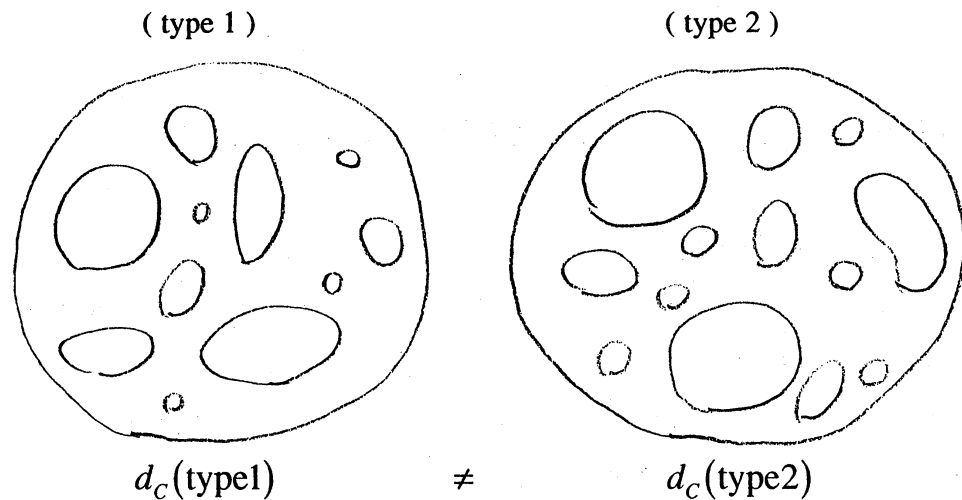


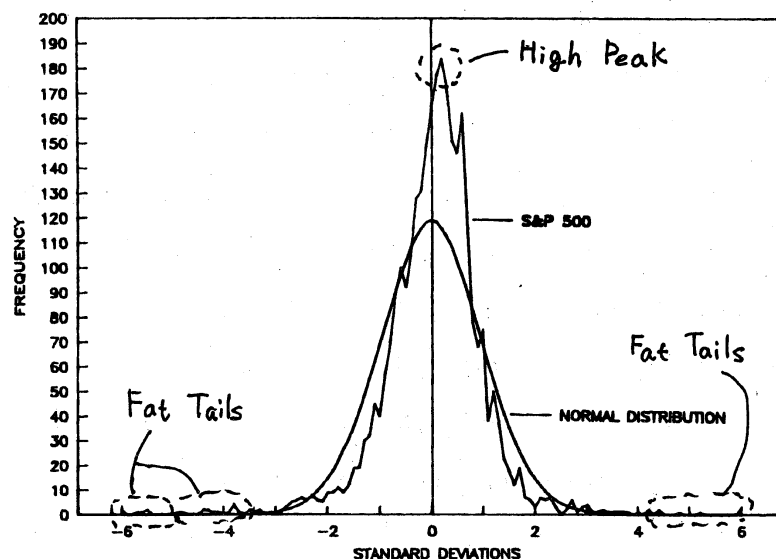
図 ( 5-1 )

同様に、日本の河川に対しても、我々はその形状から適当に確率分布を設定することによって、状態のフラクタル次元を用いた、河川の形状の複雑さの解析を行うことが出来る。

## ( 2 ) 状態のフラクタル次元を用いた株価変動の解析[11]

従来の計量経済学は、株価などの経済変数の変動は、ランダムウォークに従うことを前提とする。しかし、現実の市場においては、例えば、株価の変動には、過去が現在に影響を及ぼし、現在が未来に影響を及ぼすというフィードバック効果が存在すると考えるのは、ある意味では自然である。実際、ある一定期間における株価の収益率の度数分布を求めると、それは、正規分布というよりは、一種のパレート分布 (i.e., 分散が無限) とみなすこともできる。図 ( 5-2 ) は、Edger E. Peters による 500 企業の平均収益率の頻度グラフ ( 1928 年 1 月 ~ 1989 年 12 月 ) と正規分布との違いを示したグラフである [25]。

図 ( 5-2 ) ; 500 企業の 5 営業日毎の平均収益率 ( 1928 年 1 月 ~ 1989 年 12 月 ) の度数



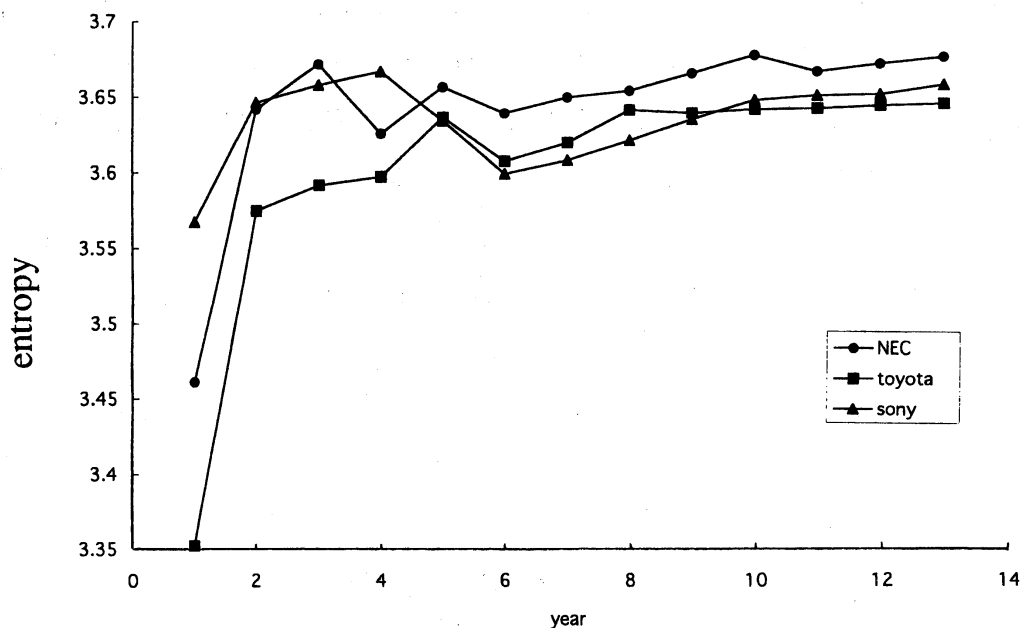
実際の収益率の頻度には、平均付近での高いピーク (High Peak) と平均から大きく離れた収益率の生起確率の高さ (Fat Tail) が見てとれるが、従来の資本市場理論は、こうした実際の経済変数から求められた確率分布を正規分布の近似として理解する。しかし、これらの特徴を正規分布とは異なる、現実の市場が持つ基本的な特徴として捉え、そのカオティックな特徴を解析しようとするのが、“資本市場のカオス解析”と呼ばれるものである[25, 26, 27, 28, 29]。実は、このような市場の特性に着目し、そのカオス解析を始めた研究者の一人にMandelbrotも挙げられる。彼は、実際の収益率の度数分布が正規分布とは異なることを、R/S解析(Rescaled Range Analysis)という手法を用いて解析した。彼は、正規分布 (Gauss測度) に従う一次元の独立な確率過程のフラクタル次元は $1/2$  (正確にはその逆数) であることを示し (この結果は、今回の我々のGauss測度のフラクタル次元と一致する)、実際の株価変動のフラクタル次元は $1/2$ より大きい値をとると主張した[26]。彼の研究をベースとして、R/S解析、相関次元などのフラクタル次元、及びリアプノフ数などを用いた株価変動のカオス解析が、近年、何らかの成果を出しつつあるように思われる。ただし、これらの解析は、確率分布そのものを定量的に解析するものではなく、それ故、実際の市場変数から得られた確率分布が持つ<High Peak & Fat Tail>などの特徴をどのように定量的に理解するかといった解析は、十分に行われているとはいえない。

そこで、我々は状態 (収益率の確率分布) のフラクタル次元を計算することによって、株価変動に現われるカオティックな特徴の解析を試みている[11]。

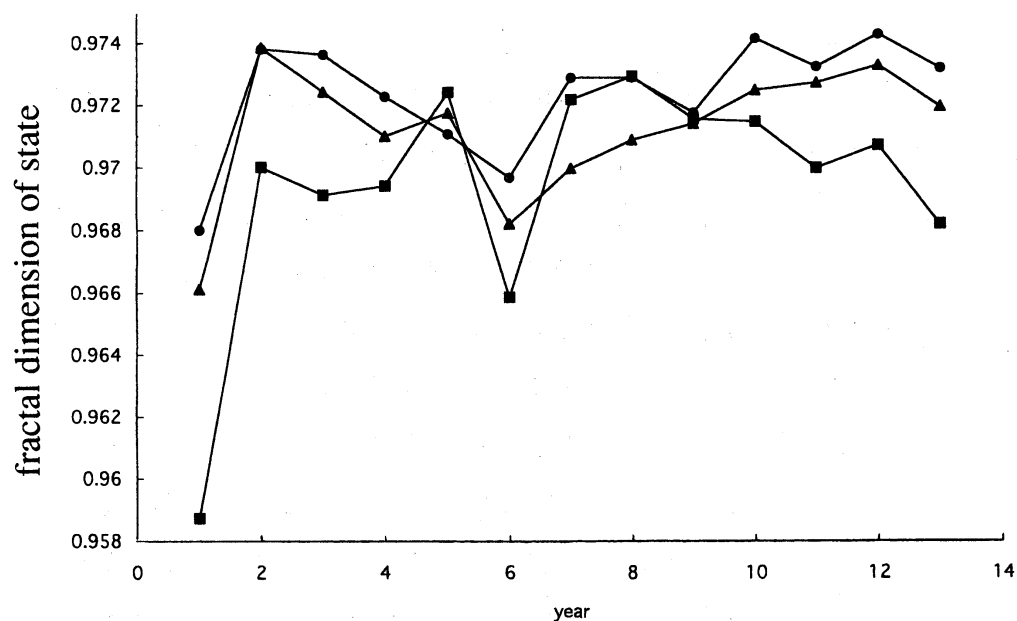
現在、我々はSONY、NEC、TOYOTAの過去13年間の株価からその収益率の度数分布を求め解析を行っているが、この3社の度数分布においても確かに、<High Peak & Fat Tail>という特徴が見てとれ、また、各々においてその<High Peak>の高さには違いがある。状態のフラクタル次元を各々に対して求めると、分布が持つ<High Peak>の高さのオーダーを、状態のフラクタル次元はエントロピーに比べ、正しく評価できる指標であることがわかった。<High Peak & Fat Tail>の大きさは正規分布からの違いの大きさを表わすと考えれば、その意味において、状態のフラクタル次元は収益率の正規分布からの乖離度を表わす指標として有効であるといえる。また、我々は、度数分布を特定する期間の長さを変えることによって (時間スケールを変化させることによって)、そのスケール変換に対してエントロピーや状態のフラクタル次元がどのように変化するか調べてみた。図(5-3)は収益率の度数分布を、1年間(1983年1月～1984年1月)、2年間(1983年1月～1985年1月)、…、13年間(1983年1月～1995年9月)と求めたときの、各々に対するエントロピー、状態のフラクタル次元のグラフである。

図 ( 5-3 ) ; スケール変換に対するエントロピー及びフラクタル次元の変化

## (1) entropy change



## (2) fractal change



エントロピーは、分布を特定する期間を長くしていくとある一定の大きさに収束していくように思われるが、状態のフラクタル次元にはある種の周期性が見てとれる。すなわち、正規分布からの乖離度の大きさと、3社のフラクタル次元の値の類似性に関する二つの周期性である。これは、分布の持つ複雑さそのものはある一定の範囲に収まるにも関わらず、正規分布からの乖離という点では市場は周期的に揺らいでいるといったことを表わしており、このような周期性をスケール変換に対する一種の自己相似性の現われと解釈すれば、我々は、株価変動に存在するフラクタル構造（ある種の階層構造）を特徴付けることが出来るのである。

## 参考文献

- [1] B. B. Mandelbrot ; "The Fractal Geometry of Nature", W. H. Freeman and Company, San Francisco (1982).
- [2] A. N. Kolmogorov ; "Theory of transmission of information", Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 33, pp.291-321 (1963).
- [3] M. Ohya ; "Some aspects of quantum information theory and their applications to irreversible processes", Rep. Math. Phys., 27, pp. 19-47 (1989).
- [4] M. Ohya ; "Fractal dimensions of general quantum states", Proc. Symp. Appl. Func. Anal., 11, pp. 45- (1989).
- [5] M. Ohya ; "Fractal dimensions of states", in Quantum Probability and Related Topics VI (World Scientific, Singapore), pp. 359-369 (1991).
- [6] 松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元", 数理情報科学辞典 (大矢雅則、その他編), pp. 406-408, 朝倉書店 (1995).
- [7] 大矢雅則、松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元を用いたクレータ及び河川の複雑さの解析", 電子情報通信学会論文誌に掲載予定.
- [8] T. Matsuoka & M. Ohya ; "Fractal dimensions of states and its application to Ising model", Rep. Math. Phys., 36, pp.27-41(1995).
- [9] M. Ohya, T. Matsuoka & K. Inoue ; "New approach to  $\varepsilon$ -entropy and its comparison with Kolmogorov's  $\varepsilon$ -entropy", IEEE Trans. に投稿中.
- [10] 松岡隆志 ; "状態のフラクタル次元を用いた様々な現象の特徴付け", 学位論文, 東京理科大学 (1995).
- [11] T. Andoh, T. Matsuoka & M. Ohya ; "New approach to fractal analysis of stock returns fluctuation", preprint.
- [12] M. Ohya ; "Foundation of entropy, complexity and fractal in quantum systems", preprint.
- [13] A. N. Kolmogorov & V. M. Tihomirov ; " $\varepsilon$ -entropy and  $\varepsilon$ -capacity of sets in function space", Amer. Math. Soc. Translation, Ser. 2, 17, pp. 277-364 (1961).
- [14] I. M. Gelfand & A. M. Yaglom ; "Calculation of the amount of information about a random function contained another such function", Amer. Math. Soc. Transl., 12, pp. 199-246 (1959).
- [15] K. J. Falconer ; "The Geometry of Fractal Sets", Cambridge Univ. Press (1989).
- [16] 大矢雅則 ; "情報と数理18, 19", 数理科学 No. 371, 373, サイエンス社 (1994).
- [17] 高安秀樹編 ; "フラクタル科学", 朝倉書店 (1987).
- [18] C.R. Baker ; "Capacity of the Gaussian channel without feedback", Inform. and Control, 37, pp.70-89 (1978).
- [19] S. Ihara ; "Information Theory for Continuous System", World Scientific (1993).
- [20] M. Ohya & N. Watanabe ; "A new treatment of communication processes with Gaussian channels", Japan J. Appl. Math., 3, pp. 197-206 (1986).
- [21] M. Ohya & N. Watanabe ; "Information dynamics and its application to Gaussian communication process", Maximum Entropy and Bayesian Methods, 12, pp. 195-203 (1993).
- [22] K. Yanagi ; "An upper bound to the capacity of discrete time Gaussian channel with feedback", Lecture Notes in Math., 1299, pp. 565-570 (1988).
- [23] M. S. Pinsker ; "Gaussian sources", Problems Inform. Trans., 14, pp. 59-100 (1963).
- [24] 水谷 仁 ; "クレータの科学", 東京大学出版会 (1991).
- [25] E.E. Peters ; "Chaos and Order in The Capital Markets", John Wiley & Sons, New York (1991).
- [26] B. B. Mandelbrot ; "Statistical methodology for non-periodic cycles : From the covariance to R/S analysis", Annals of Economic and Social Measurement, 1, pp. (1972).
- [27] T. Vaga ; "The coherent market hypothesis", Financial Analysts Journal, December/January (1991).
- [28] M. Larrain ; "Empirical tests of chaotic behavior in a nonlinear interest rate model", Financial Analysts Journal, in press (1991).
- [29] D. N. Chorafas ; "Chaos Theory in the Financial Markets", Probus Publishing Company, Chicago (1994).